§ Operadores diferenciais (em 3-dim)

Introduzimos o símbolo ∇ ('nabla') para indicar um operador diferencial vetorial. Em coordenadas cartesianas escrevemos formalmente:

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Em analogia com vetores, várias operações são possíveis:

i) Gradiente de uma função escalar φ:

'$\nabla\varphi$ é um campo vetorial',

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\hat{k}.$$

ii) Divergente de um campo vetorial $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$:

$$\nabla\cdot\vec{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

É o análogo de um produto escalar entre vetores.

'$\nabla\cdot\vec{A}$ é uma função escalar'.

iii) Rotacional de um campo vetorial $\vec{A}$:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) +$$

$$+ \hat{\jmath}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

É o análogo de um produto vetorial.

($\nabla \times \vec{A}$ é um campo vetorial)

Tomando cuidado com os operadores diferenciais, escrevemos:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

<u>Notações possíveis</u>:

$$\nabla \varphi = \text{grad}\,\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{Div}\,\vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \text{Rot}\,\vec{A} = \text{Curl}\,\vec{A}$$

Propriedades do operador Gradiente

O 'nabla' opera sobre uma função escalar

$$\varphi = \varphi(x, y, z).$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k}$$ é um campo vetorial. Este é ortogonal às curvas de nível da função φ,

$$\varphi(x, y, z) = cte.$$

Sabemos que a diferencial de uma função, representa localmente um plano tangente. Para

$$\varphi(x, y, z) = cte \Rightarrow d\varphi = 0$$

$$0 = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$
$$= \nabla\varphi \cdot d\vec{r},$$

com $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$ no plano tangente no ponto (x, y, z) da superfície $\varphi(x, y, z) = cte$.

$$\nabla\varphi \cdot d\vec{r} = 0$$

implica que $\nabla\varphi$ é ortogonal ao plano tangente, portanto ortogonal à superfície $\varphi = cte$.

O $\nabla\varphi$ aponta na direção de maior variação da função φ.

Exemplo.

Seja $\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{A}{r}$, $A>0$

onde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é a distância à origem.

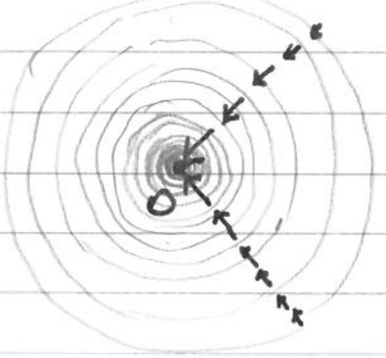
Curvas de nível:

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C = \text{cte.} > 0$$

Resultado: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{A}{C}$

ou $\qquad x^2+y^2+z^2 = \left(\dfrac{A}{C}\right)^2$ ---- (*)

(*) representa superfícies esféricas centradas na origem. O raio da esfera decresce quando $C\to\infty$



Calculamos, em coordenadas cartesianas, $\nabla\varphi$:

$$\nabla\varphi = \hat{\imath}\left(-\frac{1}{2}\frac{2xA}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) +$$

$$+\hat{\jmath}\left(-\frac{yA}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) +$$

$$+\hat{k}\left(-\frac{zA}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Isto é:

$$\nabla\varphi = -\frac{A}{(x^2+y^2+z^2)}\left\{\frac{x\hat{i}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

e usando o vetor $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, obtemos

$$\nabla\varphi = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \quad ,$$

$\nabla\varphi$ aponta para a origem segundo o raio $\vec{r}$.
Do desenho, é claro que é ortogonal às superfícies das esferas

— o —

Temos a identidade:

$$\nabla\times\nabla\varphi = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\hat{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\hat{k}$$

Para derivadas contínuas temos:

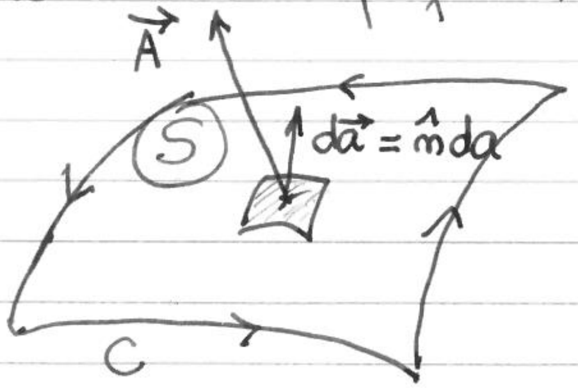
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i} \, .$$

Portanto:

$$\boxed{\nabla\times\nabla\varphi = 0.}$$

§ Integração sobre superfícies : Teorema de Stokes

Tratamos integrais (escalares) sobre uma superfície, da projeção de um campo vetorial sobre a normal à superfície.



Para uma superfície infinitesimal,

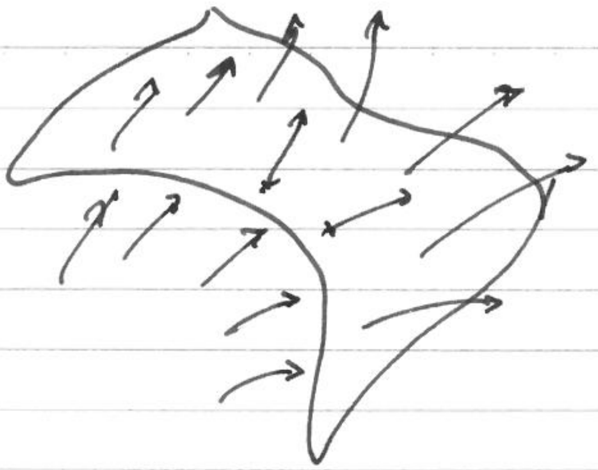
$$d\vec{a} = \hat{n}da,$$

onde $\hat{n}$ é a normal e 'da' é o tamanho do elemento de superfície. A superfície é orientada segundo a curva C que limita a superfície (segundo o sentido no qual C é percorrida). Isso define a direção de $\hat{n}$ para uma superfície aberta. Se a superfície for fechada, $\hat{n}$ é positivo na direção que aponta para fora.

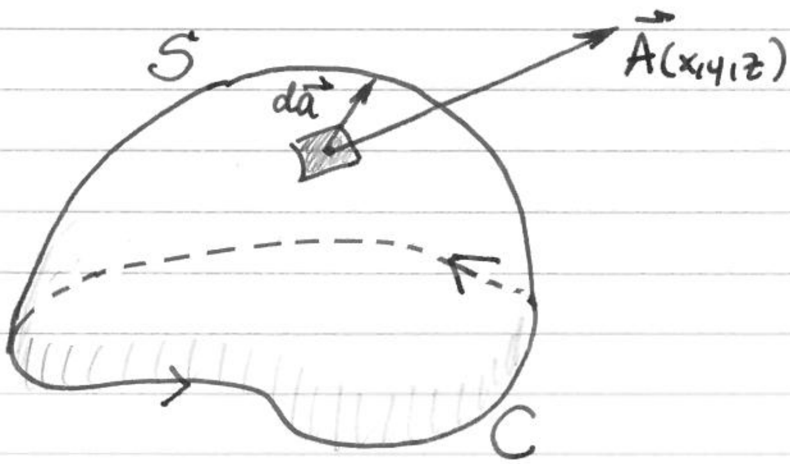
Seja $\vec{A}$ o campo vetorial. A integral em questão é do tipo:

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{A}\cdot\hat{n})da.$$

Estas integrais, as vezes, são chamadas de 'fluxo do campo $\vec{A}$, na superfície S'. Podemos dar uma imagem 'hidrodinâmica' do fluxo através da Superfície S.



O teorema de Stokes se aplica sobre uma superfície aberta S, limitada por uma curva C orientada:



- Teorema de Stokes

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{S_C} (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a}\,,}$$

onde a superfície S é qualquer superfície limitada pela curva C. Os campos $\vec{A}$ e $\nabla\times\vec{A}$ precisam existir e ser integráveis nas variedades.

Voltemos para a integral de linha que define o trabalho:

$$W(1\to 2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad .$$

Se a força $\vec{F}$ for o gradiente de uma função escalar,

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}) ,$$

temos que

$$W(1\to 2) = -\int_{P_1}^{P_2} \underbrace{\nabla V(\vec{r})\cdot d\vec{r}}_{dV} = -\int_{P_1}^{P_2} dV = -\int_{V(\vec{x}_1)}^{V(\vec{x}_2)} dV$$

$$= -\left(V(\vec{x}_2) - V(\vec{x}_1)\right) = V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2) \quad .$$

O trabalho $W(P_1 \to P_2) = V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2)$ só depende dos pontos extremos e não da trajetória:

$$W(1\to 2) = \int_{P_1,\,1}^{P_2} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_{P_1,\,2}^{P_2} d\vec{r}\cdot\vec{F} \quad .$$

A função escalar $V(\vec{x})$ se comporta como um potencial.

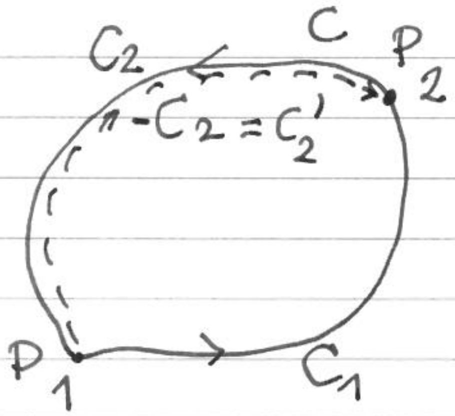
Obtemos também duas consequências:

i) $\quad \nabla\times\vec{F} = -\nabla\times\nabla V(\vec{x}) = 0 \quad ,$

O campo de forças $\vec{F}$ tem rotacional nulo ;

ii) O trabalho realizado sobre um circuito fechado é nulo :

$$W(1 \to 1) = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



Tomar um ponto arb. P_2 da curva fechada C. Chamamos C_1 a curva aberta de P_1 a P_2 (em sentido positivo). C_2 é o complemento que fecha a curva:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1, C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_2, C_2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \, .$$

Para a 2ª integral temos que

$$\int_{P_2, C_2}^{P_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} = - \int_{P_1, C_2'}^{P_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \, ,$$

onde C_2' é a mesma curva C_2 percorrida em sentido negativo. Assim :

$$W(1\to 1) = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1,\,C_1}^{P_2} d\vec{r}\cdot\vec{F} - \int_{P_1,\,C_2'}^{P_2} d\vec{r}\cdot\vec{F} \,,$$

mas as duas integrais sobre C_1 e C_2' são iguais, porque $\vec{F}$ é o gradiente de uma função escalar.

Resultado:

$$\boxed{W(1\circlearrowleft) = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \,,} \qquad (*)$$

para qualquer curva fechada C.

Esta relação é satisfeita por todo campo de forças que define uma função potencial como:

$$-\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv V(\vec{x}) \,,$$

onde $\vec{x}_0$ é um ponto de referência arbitrário. Isso implica que

$$dV = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \nabla V\cdot d\vec{r} \,,$$

ou seja: $\boxed{\vec{F} = -\nabla V(\vec{x})}$

tilibra

Vamos supor agora que

$$\nabla \times \vec{F} = \mathrm{Rot}\,\vec{F} = 0 .$$

Aplicando o Teorema de Stokes para uma curva fechada C arbitrária, obtemos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_C} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = 0 .$$

Portanto, a integral de linha de $\vec{F}$ sobre qualquer curva fechada é nula. Isso significa que $\vec{F}$ deriva de uma função potencial $V(\vec{x})$, com:

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{x})$$

e

$$V(\vec{x}) = -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

Resultado:

$$\boxed{\parbox{0.9\linewidth}{" $\nabla \times \vec{F}$ é uma condição necessária e suficiente, para $\vec{F}$ ser um campo de forças conservativo, isto é, $\vec{F}$ pode ser derivado de uma função escalar (energia potencial). "}}$$

Exemplo (Symon, Cap. 3, 35)

Seja o campo de forças dado em coordenadas cartesianas:

$$F_x = 6ab\, z^3 y - 20\, b x^3 y^2 ,$$

$$F_y = 6ab\, x z^3 - 10 b x^4 y ,$$

$$F_z = 18\, ab\, x z^2 y ,$$

onde (a, b) são constantes.

Verificamos primeiro se o campo é conservativo. Calculamos o rotacional :

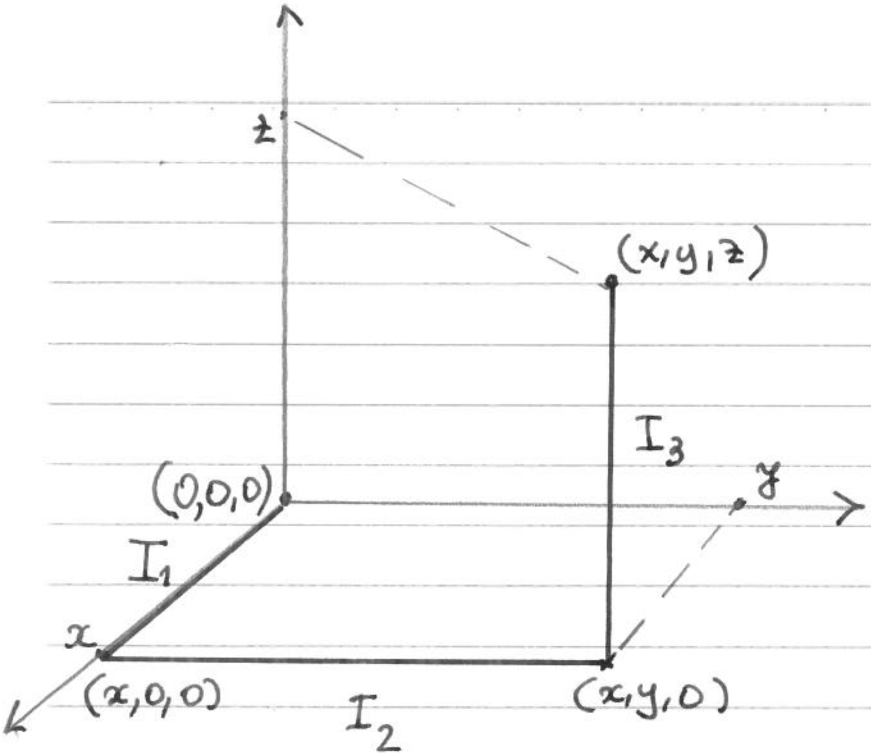
$$x : \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = 18 ab x z^2 , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 18 ab x z^2 , \quad \checkmark$$

$$y : \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = 18 ab z^2 y , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 18 ab z^2 y , \quad \checkmark$$

$$z : \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 6ab\, z^3 - 40\, b x^3 y , \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 6ab z^3 - 40 b x^3 y \quad \checkmark$$

Resulta: $\qquad \nabla \times \vec{F} = 0 .$

Portanto $\vec{F}$ é conservativa e deriva de um potencial $V(\vec{x})$. Calculamos $V(\vec{x})$ escolhendo a trajetória mais conveniente. Neste caso, tomamos a origem $(0,0,0)$ como referência:



A trajetória de (0,0,0) a (x,y,z) completa, é decomposta em 3 seções que chamamos (I_1, I_2, I_3).

Para I_1, só a coordenada x varia, $d\vec{r} = (dx, 0, 0)$
I_2, só a coordenada y varia, $d\vec{r} = (0, dy, 0)$
I_3, " " " z ", $d\vec{r} = (0, 0, z)$

$$V(\vec{x}) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \left(dx\, F_x + dy\, F_y + dz\, F_z \right)$$

$$= \underbrace{-\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} dx'\, F_x}_{I_1} \underbrace{- \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} dy'\, F_y}_{I_2} \underbrace{- \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz'\, F_z}_{I_3}$$

Calculamos separadamente as contribuições:

$$I_1 = -\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} dx' \left(6ab z^3 y - 20 b x'^3 y^2 \right) = - \Big[6ab x' z^3 y - 5b x'^4 y^2 \Big]_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}$$

$$= 0$$

I_1 é nula por causa da escolha de $(0,0,0)$ como referência.

$$I_2 = -\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} dy' \left(6abz^3x - 10bx^4y'\right)$$

$$= -\left(6aby'z^3x - 5bx^4y'^2\right)\Big|_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}$$

$$= 5bx^4y^2$$

$$I_3 = -\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz' \left(18abxz'^2y\right) = -\left[6abxz'^3y\right]_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}$$

$$= -6abxz^3y.$$

Em total:

$$V(\vec{x}) = 5bx^4y^2 - 6abxz^3y + \underline{cte}.$$

Teorema de Conservação da energia.

Seja $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ e energia cinética.

Temos:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) = m \, \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Usamos agora a eq. de Newton em 3-dim:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

obtendo:

$$\frac{d}{dt} T = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad : \text{Potência}$$

Integrando em 't':

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(t_2) - \frac{1}{2} m \vec{v}^2(t_1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, (\vec{v} \cdot \vec{F})$$

Resultado:

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} dt \, (\vec{v} \cdot \vec{F}) \quad : \text{Trabalho}$$

Teorema da Energia.

"A variação da energia cinética durante um intervalo de tempo dado, é igual ao trabalho realizado pela força nesse mesmo intervalo de tempo."

A integral temporal pode ser transformada numa integral de linha:

$$dt\,\vec{v} = dt\,\frac{d\vec{r}}{dt} = d\vec{r}$$

$$\Delta T = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} (d\vec{r}\cdot\vec{F})$$

Se a força $\vec{F}$ for conservativa, $\vec{F} = -\nabla V(\vec{x})$

$$d\vec{r}\cdot\vec{F} = -\nabla V(\vec{x})\cdot d\vec{r} = -dV(\vec{x}).$$

Então o Teorema fica:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}(t_2) - \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}(t_1) =$$

$$= -\int_1^2 dV = V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2)$$

{ a integração <u>não</u> depende da trajetória!

e arranjando os termos:

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2} + V(\vec{x}_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2} + V(\vec{x}_2) = E = cte,$$

isto é, a energia E é conservada:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + V(\vec{x}) = cte.}$$